

## Procedimientos de Resolución de Problemas Multiplicativos de Isomorfismo de Medidas

Manuel alejandro garcía riveros, [alejandro\\_972@yahoo.com](mailto:alejandro_972@yahoo.com)

Institución Educativa Distrital Ied Tenerife – Granada Sur

Universidad Agraria De Colombia

Alberto suárez olarte, [betosuarez68@gmail.com](mailto:betosuarez68@gmail.com)

Centro Educativo Distrital Cedit Guillermo Cano Isaza

Universidad Pedagógica Nacional

Universidad San Buenaventura

### 1. Presentación del problema

Dentro de las múltiples clasificaciones que existen de los problemas multiplicativos, se destacan las que tienen en cuenta el aspecto semántico en su enunciado, entre ellas se encuentra la estructura de isomorfismo de medidas propuesta por Gerard Vergnaud y plasmada en el libro “El niño, las matemáticas y la realidad” (1991 y reimpreso en 2000).

El estudio acerca de la resolución de los problemas de isomorfismo de medidas por parte de los estudiantes es de gran importancia, ya que estos se encuentran en la mayoría de actividades que son desarrolladas cuando se trabaja la multiplicación en la educación básica primaria y más adelante en niveles superiores, ratificando su presencia permanente en el currículo a lo largo de los años escolares.

De acuerdo con lo anterior y teniendo en cuenta los planteamientos de Vergnaud (2000), la estructura multiplicativa no puede y no conviene entenderla desde la estructura aditiva, es decir, que la multiplicación no es solamente una suma repetida, es más, esta concepción es limitante y generadora de obstáculos en el aprendizaje. En el mismo sentido, Maza (1991) insiste en negar que la multiplicación se pueda interpretar como una suma repetida, ya que desde lo matemático se define como una operación binaria, al verla como suma repetida se convierte en una operación unitaria que niega la posibilidad de la conmutatividad.

Diversas investigaciones (Almeida, 2001, Gómez, 2006, Llinares1997) han centrado su estudio en los procedimientos que muestran los estudiantes en el proceso de resolución de problemas de estructura multiplicativa tratando de indagar sobre el actuar cognitivo frente a un problema presentado en representación verbal, tabular y/o icónica mostrando en sus resultados errores, obstáculos y niveles de complejidad analizados desde las producciones de los niños y niñas de diferentes grados de escolaridad. Las indagaciones realizadas en nuestro país no han sido ajenas a este tipo de cuestionamientos conceptuales que se dan a nivel internacional. Documentos creados colectivamente como los Lineamientos de Matemáticas (1998) y los Estándares de competencias básicas en Matemáticas (2006) dedican parte de su contenido al estudio y presentación de la estructura multiplicativa a lo largo de la educación básica, en concordancia con la idea de que es un concepto que se desarrolla y se adquiere a lo largo de mucho tiempo.

Teniendo como referente los planteamientos realizados en los apartados anteriores se puede establecer que la multiplicación está presente a lo largo de la educación escolar no solamente como objeto de estudio en los contenidos curriculares para cada grado en la educación básica sino también como factor importante en la evaluación que se realiza a los estudiantes para medir su grado de competencias.

La resolución de problemas multiplicativos reviste gran dificultad en los estudiantes, ya que en la clase de matemáticas generalmente es utilizado el mismo tipo de problema, debido a la concepción que tiene el maestro acerca de la multiplicación y de la organización curricular que es utilizada para programar las clases.

Esta investigación centró su interés en estudiar los procedimientos que utilizan los estudiantes de quinto grado de educación básica primaria cuando resuelven problemas multiplicativos que tienen estructura de isomorfismo de medidas.

## **2. Marco de referencia conceptual**

Se realizó el análisis de investigaciones relacionadas con el objeto de estudio clasificando los trabajos analizados en dos grandes grupos: el primero reúne las investigaciones que dan cuenta de los procedimientos que los estudiantes usan al resolver problemas de estructura multiplicativa (Almeida, 2001, Gómez y Contreras, 2009, Linares y Sánchez, 1997). Un segundo grupo que reunió algunos trabajos que describen como se vive la multiplicación en la escuela (Greer, 1992, Vergel, 2004, Rojas y Romero, 2006, Bello y Salazar, 2007). Al comprender la complejidad que implica

analizar la estructura multiplicativa, se decidió limitar el campo de estudio de este trabajo a los problemas de isomorfismo de medidas.

### 3. Metodología

El cuestionario que se aplicó (denominado cuestionario PIM) estuvo compuesto por 12 problemas multiplicativos que tienen estructura de isomorfismo de medidas, los doce problemas fueron divididos en tres grupos teniendo en cuenta la representación empleada para el planteamiento del enunciado, así: (a) verbal-icónica, cuatro problemas; (b) verbal-tabular, cuatro problemas y (c) enunciado verbal, cuatro problemas. Además se tuvo en cuenta la clasificación de los problemas de isomorfismo de medida. Los aportes desde cada uno de los elementos analizados en el marco conceptual permitieron realizar un análisis de los procedimientos, entendidos como el proceso empleado por el estudiante para resolver el problema a través de un dibujo, un algoritmo (adición, multiplicación o división) o una explicación verbal.

Este análisis se realizó esperando encontrar evidencias de procedimientos escalares o funcionales dentro de una concepción de relación ternaria de la multiplicación, de acuerdo con lo expresado por Vergnaud (2000) y por lo encontrado en las diferentes investigaciones ya documentadas. Para el análisis se tuvo en cuenta la representación con la cual se enuncio el problema, las representaciones entendidas como “las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes” (Castro y Castro, 2000, p. 96).

Como consecuencia del estudio de los procesos de resolución (procedimientos) mostrados por los estudiantes en el cuestionario PIM, se diseñaron categorías de análisis de acuerdo a la relación mostrada entre los datos dados en el enunciado. Si en el dibujo, operación y/o explicación verbal expresada por el alumno se notó que relacionó las cantidades de manera lineal bajo el esquema  $a \times b = c$  este procedimiento se considera dentro de la relación ternaria. En cambio, si en el dibujo, operación y/o explicación verbal expresada por el alumno se notó un procedimiento donde relacionó los dos espacios de medidas teniendo en cuenta, las cuatro cantidades involucradas se clasifican como una relación cuaternaria.

En la relación cuaternaria se categorizaron los procedimientos en tres clases: (a) el procedimiento funcional (b) el procedimiento escalar y (c) el procedimiento de iteración de unidades. Definidos los dos primeros de acuerdo a la propuesta de Vergnaud (2000) y el procedimiento de unidades iterativas acercándose al concepto conocido como “unitizing” de acuerdo a lo expuesto por Lamon (1994).

En la relación ternaria se categorizaron los procedimientos en tres grandes grupos: (a) multiplicación, (b) división y (c) suma repetida. Algunos procedimientos que no se ubican dentro de las categorías anteriores y son tenidos en cuenta solo para efectos cuantitativos y para algunas observaciones particulares son: respuesta inmediata, respuesta incorrecta, no responde.

#### 4. Análisis de resultados

Los procedimientos identificados en la resolución de los problemas del cuestionario PIM se clasificaron en dos grandes categorías: relaciones ternarias y relaciones cuaternarias. Los problemas P1, P5, P9 corresponden a problemas simples de multiplicación planteados en tres tipos de representación diferente. Los enunciados de estos problemas fueron clasificados de acuerdo con su representación así: P1 esta enunciado de forma verbal-icónica; P5 de manera verbal-tabular y P9 se representa con un enunciado verbal. Se pudo observar que dentro de la relación cuaternaria se identificaron procedimientos categorizados como procedimientos funcionales y procedimientos escalares, además, se logró identificar el procedimiento que se denominó como iteración de unidades.

Realizando un análisis comparativo de la categoría de relación funcional en los tres tipos de representación se evidencia que la verbal-tabular (P5) favoreció el procedimiento funcional sobre las otras dos representaciones. La figura 1 muestra el procedimiento funcional empleado por un estudiante para resolver el problema 5

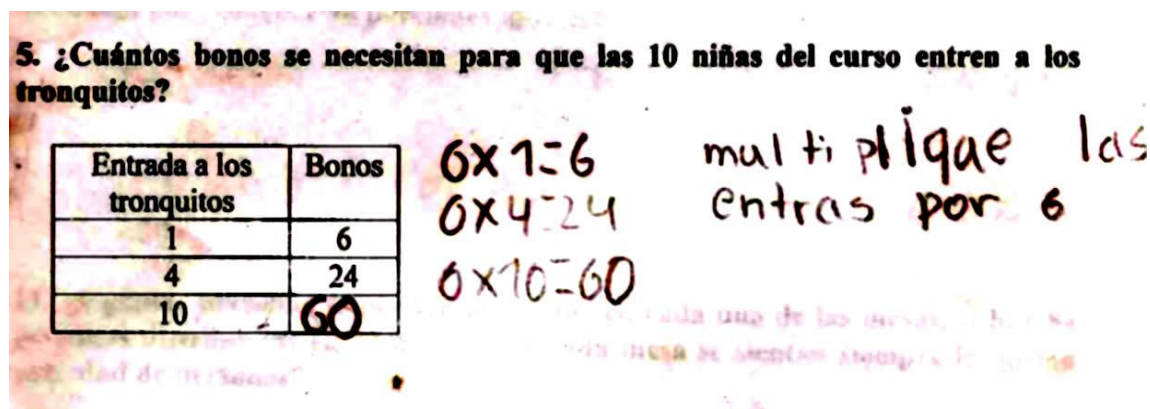


Figura 1. Procedimiento funcional de P5. Tomado de cuestionario estudiante 17

En este problema los dos espacios de medidas están relacionados mediante la función lineal



, y de acuerdo con lo observado en la figura 1 y al planteamiento expresado en el

marco de referencia en el que se establece que el procedimiento funcional consiste en establecer la correspondencia entre las cantidades de ambos espacios de medidas aplicando a la vez en ambos espacios un operador funcional, que representa el coeficiente de la función lineal que existe entre los dos espacios de medidas, el razonamiento empleado por el estudiante le permite encontrar el operador  $\times 6$  que pone en evidencia el análisis de tipo funcional que relaciona las cantidades en forma horizontal lo cual implica pasar de un espacio de medida al otro como lo expresa Vergnaud,(2000). Este mismo autor indica que la representación tabular favorece el uso de relaciones cuaternarias en los procedimientos de resolución de problemas de isomorfismo de medidas. Llinares y Sánchez (1997), encuentran procedimientos similares en su investigación sobre evolución de estrategias, donde las tareas se presentan con una representación tabular.

Los resultados clasificados dentro de la categoría llamada como iteración de unidades han mostrando un acercamiento al concepto de uniticidad (*unitizing* en términos de Lamon, 1994 en Harel & Confrey, 1994). Para avanzar de la suma o la resta a una estructura más compleja como lo es la multiplicación, se requiere un proceso mental de composición de unidades múltiples. En los resultados estudiados se puede observar que la representación verbal-icónica de P1 favoreció este proceso, mientras que en P5, con representación verbal-tabular y P9 con representación de enunciado verbal no se encontró ninguna evidencia de este procedimiento. En el figura 2 se muestra un procedimiento que permite identificar la relación que el niño establece entre el espacio de medida *cajas* y el espacio de medida *paquetes*, lo cual verifica el planteamiento de Lamon, (1994) que afirma que la representación en forma de dibujos facilita los procedimientos de emparejamiento entre los espacios de medida.

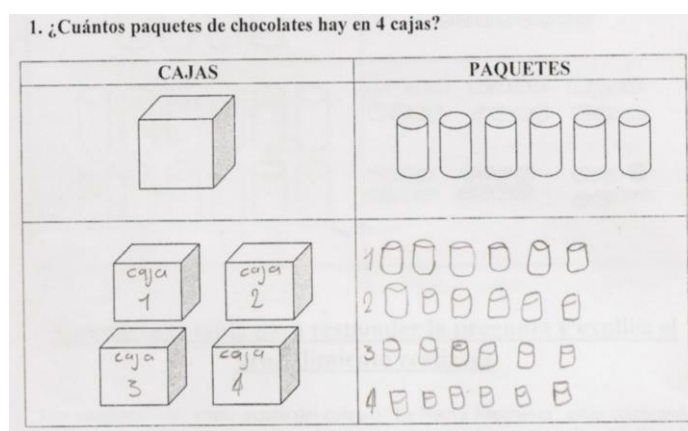


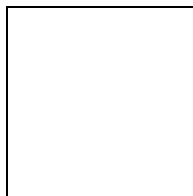
Figura 2. Procedimiento de unidad múltiple de P1. Tomado de cuestionario estudiante 12

A partir del análisis de la figura 2, se puede observar que el estudiante construyó una unidad de referencia conformada por seis paquetes por caja, la numeración que usa en cada fila de seis paquetes en el espacio de medida *paquetes* y la numeración en cada caja en el espacio *cajas* sugiere un intento de establecer una relación entre los dos espacios de medida, por ello este procedimiento se categorizó dentro de las relaciones cuaternarias.

El dibujo que realiza el niño permite observar rasgos de habilidades de construcción de unidades múltiples, existe una organización en el procedimiento del niño que sugiere la organización de unidades de unidades, en términos de Lamon, pues ubica en cada fila 6 unidades y las numera con el número 1 y sigue la secuencia numérica: 6 es 1 12 es 2 18 es 3

Por otra parte, dentro de los problemas solucionados usando una relación ternaria se destacan los procedimientos categorizados como multiplicación y suma repetida, siendo P9 el problema con mayor índice de procedimientos de este tipo.

En las resoluciones de los estudiantes se presentaron mayor cantidad de procedimientos ternarios comparados con los procedimientos de relación cuaternaria, posiblemente porque como afirman diversos autores (Obando, G y otros, 2004, Freudenthal en Puig 1995,



Vergnaud, 2000) el modelo habitual tiene gran arraigo en la escuela, en particular, en el colegio donde se realizó el estudio pues se observó este hecho en el análisis realizado a los problemas existentes en los cuadernos de los estudiantes. Para Vergnaud (2000) esta forma de escribir la multiplicación no es una representación correcta y no permite ver la multiplicación como una operación cuaternaria.

En general al comparar los problemas de división búsqueda del valor unitario en las tres representaciones se concluye que, al igual que en los problemas simples de multiplicación, la representación verbal-tabular permite que los estudiantes objeto de estudio muestren de manera evidente procedimientos pertenecientes a la categoría funcional mientras que los problemas de representación verbal-icónica permiten identificar procedimientos de la categoría de iteración de unidades, lo cual concuerda con los estudios de diversos autores (por ejemplo Lamon, 1994, Vergnaud, 2000) y con los reportes de investigaciones en el campo (por ejemplo Llinares y

Sánchez, 1997). Las relaciones ternarias categorizados como de multiplicación y de suma repetida son procedimientos que se hacen visibles, con mayor frecuencia, en los problemas con representación de enunciado verbal, lo cual ha sido estudiado con especial cuidado por investigadores como Rojas y Romero (2006), integrantes del grupo MESCUD en su trabajo “Estrategias para promover el aprendizaje de la multiplicación como cambio de unidad” analizado en el apartado 1.2.2.

La tercera clase de problemas son los de división: búsqueda de la cantidad de unidades. Los problemas del cuestionario PIM que pertenecen a esta clasificación son P3, P7 y P10 y, al igual que en los problemas simples de multiplicación y en los de división: búsqueda del valor unitario, el funcional es el más representativo de los procedimientos categorizados dentro de la relación cuaternaria. Para Vergnaud (2000) los problemas simples de división búsqueda de la cantidad de unidades son de un nivel de complejidad mayor en el mismo sentido, para Castro (1995) los resultados reiterativos donde los estudiantes evitan el proceso de división en los procedimientos pueden originarse debido a la mayor complejidad que presenta su algoritmo con respecto a la multiplicación y en el papel que pueden representar las cantidades del problema en los dos espacios de medida de acuerdo a la estructura del problema.

La cuarta clase de problemas son los referidos a cuarta proporcional. En el cuestionario PIM hay cuatro problemas de este tipo P4, P8 y P12. Teniendo en cuenta que la mayoría de los estudiantes que resolvieron el cuestionario PIM no evidencian procedimientos de resolución en los problemas de cuarta proporcional P4, P8 y P12 se tomó la decisión de no incluir un análisis exhaustivo de estos.

## 5. Conclusiones:

Al resolver problemas multiplicativos de isomorfismo de medidas los niños de quinto grado de educación básica, establecen dos clases de relaciones entre los datos presentados en el enunciado: cuaternarias y ternarias. En las relaciones cuaternarias se encontraron tres procedimientos: (a) funcional, (b) escalar y (c) iteración de unidades, en donde los dos primeros coinciden con los planteamientos teóricos de Vergnaud (2000) expuestos en la sección 2.2. Cuando el niño estableció únicamente una relación ternaria se identificaron también tres procedimientos diferentes: (a) multiplicación, (b) división y (c) suma repetida.

Los problemas simples de división: búsqueda de la cantidad de unidades, presentan más procedimientos correctos que los problemas simples de división: búsqueda del valor unitario.

Los problemas de cuarta proporcional presentan mayor dificultad que los problemas en los que uno de los valores conocidos es la unidad.

El uso de la representación verbal-tabular en el enunciado de problemas de isomorfismo de medidas favorece el establecimiento de procedimientos propios de las relaciones cuaternarias, es decir, escalares y funcionales, siendo dentro de estos más común el escalar

El procedimiento de iteración de unidades para encontrar la solución del problema, solamente es utilizado cuando el enunciado del problema se presenta mediante una representación verbal-icónica.

En los problemas en los que se presenta el enunciado mediante la representación enunciado verbal, los estudiantes utilizan mayor cantidad de procedimientos relativos a establecimiento de relaciones ternarias que de cuaternarias.

A pesar de que las situaciones multiplicativas trabajadas en el aula y en los textos de apoyo del profesor son planteadas empleado enunciados verbales, se encontró que los problemas de isomorfismo de medidas en los que el enunciado es presentado empleando representaciones verbal-icónica y verbal-tabular son de más fácil comprensión para los estudiantes y por tanto presentan mayor éxito en su solución.

## Bibliografía

Almeida, I. M. (2001). *Problemas verbais multiplicativos de quarta – proporcional: A diversidade de procedimentos de resolucao*. Tesis de maestría en educación matemática. Brasil

Bello, J y Salazar, C. (2007). *Evaluar las evaluaciones: el caso de la estructura multiplicativa en las pruebas saber*. Trabajo de grado de Maestría. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Castro Martínez, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Granada: Comares.

Castro, E y Castro, E. (2000). Representaciones y modelización. En Rico, L (comp.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (pp. 95 – 124). Barcelona: Universidad de Barcelona.

Castro, E, Castro, E y Rico, L. (1995). *Estructura aritméticas elementales y su modelización*. Colombia: una empresa docente.

García, G, Camelo, F, Mancera, G y Romero, J. (2009). *¿Podemos usar las matemáticas formales para valorar las competencias de los estudiantes? Una propuesta*. Documento borrador. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional



- Gómez, B. y Contreras, M. (2009). *Sobre el análisis de los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones*. En: PNA. Revista de investigación en didáctica de la matemática, Vol. 3, No 4, pp. 169 – 183
- Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming. En Harel, G & Confrey, J. (ed.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. (pp. 89 – 1229. Albany, New York: State university of the New York.
- Llinares, S y Sánchez, V. (1997). *El aprendizaje desde la instrucción: la evolución de las estrategias personales en tareas de proporcionalidad numérica*. En revista: Enseñanza de las ciencias, Vol. 10, No 1, pp. 37 – 48
- Martínez, M. (2003). Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado. Tesis doctoral. España, Universidad Autónoma de Barcelona.
- Maza, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y división*. Matemáticas: cultura y aprendizaje. España: Editorial Síntesis.
- Ministerio de Educación nacional, MEN. (1998). *Matemáticas, lineamientos curriculares*. Colombia: Cooperativa editorial Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional, MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanía. "lo que los estudiantes deben saber hacer y saber hacer con lo que aprenden"*. Colombia: MEN
- Puig, L y Cerdán F. (1995). *Problemas aritméticos escolares*. Matemáticas: cultura y aprendizaje. España: Editorial Síntesis.
- Rojas, P y Romero, J (2006). *Estrategias para promover el aprendizaje de la multiplicación como cambio de unidad*. Grupo MESCU. Bogotá: Universidad Distrital "Francisco José de Caldas"
- Vergel, R (2004). *Organizaciones didácticas matemáticas y criterios de evaluación en torno a la multiplicación*. Trabajo de grado de Maestría. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Vergnaud, G. (2000). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Editorial Trillas.